Решение задач №64-67

Шишкина Е.А., 415 группа

1 Постановка задачи

Пусть случайный вектор $(X_1, \ldots, X_n)$ имеет невырожденное нормальное распределение

$$P\{(X_1, \ldots, X_n) \in A\} = D \int \ldots \int_A e^{-Q(x_1,\ldots,x_n)/2} dx_1 \ldots dx_n, A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n),$$

$Q(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k,m=1}^n (x_k - a_k) b_{k,m} (x_m - a_m)$ — положительно определенная квадратичная форма от указанных разностей. Числа $a_1, \ldots, a_n$ — фиксированы.

Вычислить D (№64), $\mathbb{E}X_k$ (№65), DX_k (№66), $\mathbb{E}[(X_k - \mathbb{E}X_k)(X_m - \mathbb{E}X_m)]$ (№67), $k = 1, \ldots, n$ и результат выразить в терминах $a_1, \ldots, a_n$ и элементов матрицы $\|b_{k,m}\|$.

2 Решение

Матрица B — симметричная невырожденная положительно определенная матрица: $B' = B, |B| > 0$. Из курса линейной алгебры известно, что существует такая матрица $C \in \mathbb{R}^n \Pi^n$, что $C'BC = I$, где I — единичная матрица порядка n. Заметим, что $|C'| \cdot |B| \cdot |C| = 1$ или $|B| = 1/|C|^2$. Произведем замену $y = C^{-1}(x - a)$, тогда квадратичная форма приведется к диагональному виду

$$Q(x_1, \ldots, x_n) = (x-a)'B(x-a) = y'C'BCy = y'Iy = \sum_{i=1}^n y_i^2$$

Для того, чтобы найти нормировочную константу D, вычислим следующий интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-Q(x_1,\ldots,x_n)/2} dx_1 \ldots dx_n = \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum\limits_{i=1}^n y_i^2/2} |C| dy_1 \ldots dy_n =$$

$$= |C| \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right)^n = \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi} \right\} = (2\pi)^{n/2}/|B|^{1/2}$$

Таким образом, $D = |B|^{1/2}/(2\pi)^{n/2}$.

Теперь необходимо найти математическое ожидание k-ой компоненты. Для этого вычислим интеграл:

$$\mathbb{E}X_k = \frac{|B|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} x_k e^{-Q(x_1,\ldots,x_n)/2} dx_1 \ldots dx_n = \{x = a + Cy\}$$

$$= \frac{|B|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}|C|} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{m=1}^n c_{km} y_m + a_k \right) e^{-\sum\limits_{m=1}^n y_m^2/2} dy_1 \ldots dy_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\sum_{m=1}^n c_{km} \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} y_m e^{-\sum\limits_{m=1}^n y_m^2/2} dy_1 \ldots dy_n + a_m \int_{-\infty}^{\infty} \ldots \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sum\limits_{m=1}^n y_m^2/2} dy_1 \ldots dy_n \right) =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \left(\sum_{m=1}^n c_{km} \int_{-\infty}^{\infty} y_m e^{-y_m^2/2} dy_m \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right)^{n-1} + a_m \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz \right)^n \right) =$$

$$= \left\{ y_m e^{-y_m^2/2} \text{ — нечетная функция} \Rightarrow \int\limits_{-\infty}^{\infty} y_m e^{-y_m^2/2} = 0, \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z^2/2} dz = \sqrt{2\pi} \right\} = a_k$$

Найдем ковариации двух компонент X_k X_m, вычислим интеграл:

$$\mathbb{E}[(X_k-\mathbb{E}X_k)(X_m-\mathbb{E}X_m)] = \frac{|B|^{1/2}}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}(x_k-a_k)(x_m-a_m)e^{-Q(x_1,\dots,x_n)/2}dx_1\dots dx_n =$$

$$= \{x-a=Cy\} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dots\int\limits_{-\infty}^{\infty}\left(\sum_{s=1}^{n}c_{k,s}y_s\right)\left(\sum_{t=1}^{n}c_{m,t}y_t\right)e^{-\sum\limits_{m=1}^{n}y_m^2/2}dy_1\dots dy_n =$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t\neq s}^{n}c_{k,s}c_{m,t}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y_sy_te^{-(y_s^2+y_t^2)/2}dy_sdy_t\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz\right)^{n-2}+$$

$$+\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\sum_{s=1}^{n}c_{k,s}c_{m,s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y_s^2e^{-y_s^2/2}dy_s\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz\right)^{n-1}=$$

$$=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-z^2/2}dz=\sqrt{2\pi}\right\}=\frac{1}{2\pi}\sum_{s=1}^{n}\sum_{t\neq s}^{n}c_{k,s}c_{m,t}\left(\int\limits_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2/2}dy\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\sum_{s=1}^{n}c_{k,s}c_{m,s}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y_s^2e^{-y_s^2/2}dy_s=$$

$$=\left\{\int\limits_{-\infty}^{\infty}ye^{-y^2/2}=0,\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}y^2e^{-y^2/2}dy=1\right\}=$$

$$=\sum_{s=1}^{n}c_{k,s}c_{m,s}=(CC')_{k,m}=(B^{-1})_{k,m}=\frac{B_{k,m}}{|B|}$$

где $B_{k,m}$— алгебраическое дополнение к элементу $b_{k,m}$ матрицы B.
В частности, дисперсия k-ой компоненты равна:

$$DX_k=\mathbb{E}(X_k-\mathbb{E}X_k)^2=\frac{B_{k,k}}{|B|}$$

3 Ответ

$$D=|B|^{1/2}/(2\pi)^{n/2}$$

$$\mathbb{E}X_k=a_k$$

$$DX_k=\mathbb{E}(X_k-\mathbb{E}X_k)^2=\frac{B_{k,k}}{|B|}$$

$$\mathbb{E}[(X_k-\mathbb{E}X_k)(X_m-\mathbb{E}X_m)]=\frac{B_{k,m}}{|B|}$$